Sara ha notato un malfunzionamento al sensore di parcheggio della sua nuova auto elettrica che, tra le altre cose, si parcheggia da sola. Preoccupata, torna dalla concessionaria che sottopone il gioiellino a un controllo immediato. Le notizie non sono positive, perché a Sara viene addebitata la sostituzione della batteria che, con suo notevole disappunto, è l'unica componente non coperta dall'assicurazione. Poiché la spesa è ingente, la situazione viene illustrata alla sventurata con dovizia di particolari. Purtroppo però l'addetta parla molto velocemente. Per questo Sara decide di prendere qualche appunto prima di offrire mestamente la carta di credito al terminale *contactless*.

Nel tragitto verso casa monta rapidamente il sospetto – *proprio la batteria!* Una volta arrivata decide di rileggere i suoi appunti che riportano quattro asserzioni:

A1: la centralina elettrica è bruciata oppure il sensore di parcheggio è rotto;
A2: se la centralina elettrica non funziona, allora il sensore di parcheggio è rotto;
A3: se il sensore di parcheggio è rotto ma la batteria è da sostituire allora la centralina elettrica funziona;
A4: la batteria è da sostituire.

Per fortuna Sara ha studiato un po' di **logica booleana** che usa per capire innanzitutto se le asserzioni appena lette abbiano senso. O per essere precisi, se siano **coerenti**. Questa informazione è molto utile per il motivo seguente. Se esiste uno stato di cose in cui tutte le asserzioni sono simultaneamente vere, allora si può partire a valutarle nel dettaglio. Magari non è la spiegazione corretta, o nemmeno una particolarmente plausibile, del malfunzionamento dell'auto, ma è certamente possibile. Se, viceversa, quelle asserzioni non possono essere simultaneamente vere, si danno due circostanze. O Sara ha trascritto male, oppure l'officina ha tentato di raggirarla, spiegazione che la clausola assicurativa non rende cosí improbabile.

La faccenda è dunque intricata e non è detto che sia possibile venirne a capo in modo definitivo. Non è detto cioè che la logica booleana permetta di dipanare tutta la matassa, ma senza dubbio aiuta a impostare bene il problema. Prima di avventurarci sulle tre Linee della logica, cominciamo mettendo a fuoco di cosa si parla quando si fa logica.

Proposizioni.

Comprendere la natura degli oggetti del ragionamento logico è importante e non sempre immediato. La caratteristica centrale delle proposizioni da cui conviene partire è questa: se poste come domande ammettono sempre una risposta «sí/no».

Vediamo alcuni esempi.

I numeri primi maggiori di due sono dispari. (4)

Si tratta di una proposizione perché è *vera* dell'aritmetica elementare. Per convincersene basta ricordare che, per definizione, un numero è primo se e solo se è divisibile per 1 e per sé stesso. In particolare quindi, non può essere diviso per 2, se è maggiore di 2. Ma essere divisibile per 2 è una condizione necessaria affinché il numero sia pari. Dunque ogni primo maggiore di 2 è dispari.

L'Italia non è una repubblica. (5)

Si tratta di una proposizione perché è *falsa* dell'Italia al tempo di scrittura di questo volume. Per convincersene basta aprire la Carta costituzionale che al primo articolo riporta la negazione della (5). Si noti che non è stata sempre falsa, ma lo è dal 2 giugno 1946 (e auspicabilmente lo sarà ancora per molto).

Si può osservare una caratteristica delle proposizioni che ne rende a volte complicata e non sempre oggettiva la determinazione. In uno scenario paragonabile a quello che anima il noto film *Goodbye Lenin*, potremmo non sapere che la (5) è falsa e qualcuno o qualcosa (per esempio attraverso la tecnica del *deep fake*) potrebbe ingannarci a tale proposito. Non insisteremo su questo aspetto perché porta subito a questioni troppo profonde rispetto ai nostri scopi.

Il primo tassello fondamentale nella costruzione della cultura logica consiste nel prestare attenzione a una richiesta preliminare: gli argomenti di cui siamo interessati a valutare la correttezza devono essere valutabili con gli strumenti di cui disponiamo. Nel caso della logica booleana questo significa limitarsi a **proposizioni binarie**. Poiché non esiste un modo univoco (algoritmico) di determinare se una data espressione dotata di significato sia una proposizione, il punto di partenza della logica mette immediatamente in primo piano un messaggio molto importante per la convivenza con gli algoritmi: le decisioni iniziali che prendiamo quando impostiamo scientificamente i problemi possono determinare le conclusioni in modo non univoco e quindi non sempre oggettivo.

Formule.

Prese in isolamento le proposizioni non sono molto interessanti. Lo diventano però non appena le si combinano per formare altre proposizioni, evidentemente piú articolate di quelle di partenza. Catene di proposizioni, sotto opportune condizioni che vedremo, costituiscono **argomenti**, la cui **validità** è una proprietà logicamente fondamentale.

Da un percorso millenario sono emersi cinque modi notevoli di connettere tra loro le proposizioni, motivo per cui li chiamiamo **connettivi**. Questi svolgono un ruolo centrale nella **formalizzazione** logica, ovvero quella traduzione che ci permette di passare dalla nozione informale di «proposizione» a quella formale di «formula» – l'oggetto di base con cui si costruisce un argomento passibile di essere analizzato attraverso gli strumenti propri della logica.

Dei cinque connettivi di base, uno si dice *unario*, nel senso che si applica a un'unica formula, mentre gli altri si dicono *binari* perché si applicano, com'è evidente dal termine, a due formule. Per ognuno di questi connettivi la Tabella 1 riporta schematicamente il simbolo usato, il nome logico e i modi in cui si legge a voce alta.

simbolo	nome	lettura primaria	letture alternative
$\neg$	negazione	non	non si dà il caso che
$\wedge$	congiunzione	e	anche se, ma
$\vee$	disgiunzione	o	oppure
$\rightarrow$	implicazione	implica	se… allora (cfr. sotto)
$\leftrightarrow$	bi-implicazione	se e solo se	esattamente quando

Tabella 1. I cinque connettivi principali in uso nella logica booleana, e per estensione in tutta la matematica contemporanea.

L'importanza dei connettivi della Tabella 1 risiede nel fatto che essi ci permettono di definire senza alcuna ambiguità l'insieme delle **formule proposizionali**, che indicheremo con $\mathcal{F}$, nel modo che segue.

Partiamo da proposizioni elementari, cioè che non contengono connettivi, e associamo loro una lettera presa dall'ultima parte dell'alfabeto minuscolo: p, q, r, ecc. Per esempio

p: la funzione è derivabile nel punto x_0;
q: la funzione è continua nel punto x_0;
r: il 2 giugno 1946 era domenica.

Chiamiamo p, q, r, ecc. **variabili proposizionali**. Si tratta dei mattoni con cui costruiamo l'edificio del linguaggio logico booleano, cioè l'insieme delle sue formule. Ovviamente i mattoni fanno parte dell'edificio, cioè:

E1) Le variabili proposizionali sono formule.